Solusi Persamaan Diferensial Biasa

(Bag. 1)

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Jenis-jenis Persamaan Diferensial

1. **Persamaan diferensial biasa (PDB)** - *Ordinary Differential Equations* (ODE).

   PDB adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas. Peubah bebas biasanya disimbolkan dengan *x*.

   Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan diferensial biasa (PDB):

   (i) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

   (ii) $y' = x^2 + y^2$

   (iii) $2\, dy/dx + x^2y - y = 0$

   (iv) $y'' + y'\cos x - 3y = \sin 2x$

   (v) $2y''' - 23y' = 1 - y''$

2. **Persamaan Diferensial Parsial (PDP)** - *Partial Differential Equations* (PDE)

PDP adalah persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas. Turunan fungsi terhadap setiap peubah bebas dilakukan secara parsial.

Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan diferensial parsial (PDP):

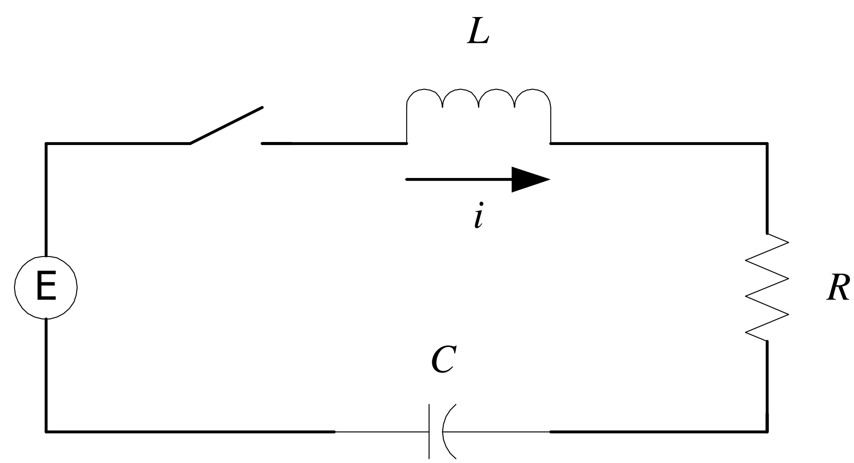
(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y}$ (yang dalam hal ini, $u = g(x,y)$)

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\sin(x + t) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (yang dalam hal ini, $u = g(x, y, t)$)

Contoh Persamaan Diferensial dalam Fisika

- Hukum tegangan Kirchoff menyatakan bahwa jumlah aljabar dari perubahan tegangan di sekeliling rangkaian tertutup adalah nol,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{q}{C} - E(t) = 0$$



PDB Orde 1

- Bentuk baku PDB orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai

$$y' = f(x, y)$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$

- *Catatan*: Kadang-kadang y' ditulis sebagai dy/dx. Jadi, $y' = dy/dx$.

- PDB orde satu yang tidak mengikuti bentuk baku tersebut harus ditulis ulang menjadi bentuk persamaan baku, agar ia dapat diselesaikan secara numerik.

Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan diferensial biasa dan transformasinya ke dalam bentuk baku PDB orde 1:

(i) $2y' + xy = 100$; $y(0) = 1$

Bentuk baku: $y' = (100 - xy)/2$; $y(0) = 1$

(ii) $-xy' + 2y/x = y' - y$; $y(1) = -1$

Bentuk baku: $y' = \dfrac{2y/x + y}{1 + x}$; $y(1) = -1$

- Penyelesaian PDB secara numerik berarti menghitung nilai fungsi di $x_{r+1} = x_r + h$, dengan h adalah *ukuran langkah* (*step*) setiap lelaran.

- Pada metode analitik, nilai awal berfungsi untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik nilai awal (*initial value*) berfungsi untuk memulai lelaran.

- Terdapat beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi PDB, yaitu

  1. Metode Euler
  2. Metode Heun
  3. Metode Deret Taylor
  4. Metode Runge-Kutta

Metode Euler

- Diberikan PDB orde satu,

$$y' = dy/dx = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0$$

- Misalkan

$$y_r = y(x_r)$$

adalah hampiran nilai y di x_r yang dihitung dengan metode Euler. Dalam hal ini

$$x_r = x_0 + rh, \quad r = 0,1,2,\ldots n.$$

Metoda Euler diturunkan dengan cara menguraikan $y(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \ldots \qquad (1)$$

Bila persamaan (1) dipotong sampai suku orde tiga, diperoleh

$$y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(t) \quad , x_r < t < x_{r+1} \quad (2)$$

Berdasarkan bentuk baku,

$$y'(x_r) = f(x_r, y_r) \quad \text{dan} \qquad x_{r+1} - x_r = h$$

maka persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + hf(x_r, y_r) + \frac{h^2}{2} y''(t)$$

- Dua suku pertama persamaan (3), yaitu

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r) \qquad ; \qquad r = 0, 1, 2, ..., n$$

menyatakan **metode Euler**.

- Untuk menyederhanakan penulisan, persamaan metode Euler dapat juga ditulis lebih singkat sebagai

$$y_{r+1} = y_r + hf_r$$

```
function y_Euler(x0, y0, b, h:real):real;
 {menghitung nilai y(b) pada PDB
       y'=f(x,y);   y(x0)=y0
  dengan metode Euler
 }
 var
    r, n: integer;
    x, y: real;
 begin
    n:=(b-x0)/h;     {jumlah langkah}
    y:=y0;           {nilai awal}
    x:=x0;
    for r:=1 to n do
    begin
       y:=y + h*f(x,y);    { hitung solusi y[xr] }
       x:=x + h;           { hitung titik berikutnya }
    end; {for}
    y_Euler:=y;      {y(b)}
 end;
```

Analisis Galat Metode Euler

- Metode Euler mengandung dua macam galat, *yaitu* **galat pemotongan** (*truncation error*) dan **galat longgokan** (*cumulative error*).

- Galat pemotongan dapat langsung ditentukan dari persamaan

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) = O(h^2)$$

- Perhatikan bahwa nilai pada setiap langkah (y_r) dipakai lagi pada langkah berikutnya (y_{r+1}).

- Galat solusi pada langkah ke-*r* adalah tumpukan galat dari langkah-langkah sebelumnya. Galat yang terkumpul pada akhir langkah ke-*r* ini disebut **galat longgokan** (*cumulative error*).

- Jika langkah dimulai dari $x_0 = a$ dan berakhir di $x_n = b$ maka total galat yang terkumpul pada solusi akhir (y_n) adalah

$$E_{total} = \sum_{r=1}^{n} (1/2) h^2 y''(t) = n \frac{h^2}{2} y''(t) = \frac{(b-a)}{2h} h^2 y''(t) = \frac{(b-a)}{2} y''(t) h$$

- Jadi, galat longgokan sebanding dengan *h*.

- Ini berarti metode Euler memberikan hampiran solusi yang buruk, sehingga dalam praktek metode ini kurang disukai, namun metode ini membantu untuk memahami gagasan dasar metode penyelesaian PDB dengan orde yang lebih tinggi.

- **Contoh**: Diketahui PDB

$$dy/dx = x + y \text{ dan } y(0) = 1$$

Gunakan metode Euler untuk menghitung $y(0{,}10)$ dengan ukuran langkah $h = 0.05$ dan $h = 0.02$. Jumlah angka bena = 5. Diketahui solusi sejati PDB tersebut adalah $y(x) = e^x - x - 1$.

Penyelesaian:

(i) Diketahui

$$a = x_0 = 0$$
$$b = 0.10$$
$$h = 0.05$$

Dalam hal ini, $f(x, y) = x + y$, dan penerapan metode Euler pada PDB tersebut menjadi

$$y_{r+1} = y_r + 0.02(x_r + y_r)$$

Langkah-langkah:

$$x_0 = 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = 1$$

$$x_1 = 0.05 \quad \rightarrow \quad y_1 = y_0 + 0.05(x_0 + y_0) = 1 + (0.05)(0 + 1)$$
$$= 1.0050$$

$$x_2 = 0.10 \quad \rightarrow \quad y_2 = y_1 + 0.05(x_1 + y_1) = 1.0050 +$$
$$(0.05)(0.05 + 1.0050) = 1.05775$$

Jadi, $y(0.10) \approx 1.05775$.

(Bandingkan dengan nilai solusi sejatinya,

$$y(0.10) = e^{0.10} - 0.01 - 1 = 1.1103$$

sehingga galatnya adalah

galat = 1.1103 - 1.05775 = 0.05255)

(i) Diketahui

$a = x_0 = 0$
$b = 0.10$
$h = 0.02$

Dalam hal ini, $f(x, y) = x + y$, dan penerapan metode Euler pada PDB tersebut menjadi

$$y_{r+1} = y_r + 0.02(x_r + y_r)$$

Langkah-langkah:

$x_0 = 0 \quad \rightarrow \; y_0 = 1$

$x_1 = 0.02 \rightarrow \; y_1 = y_0 + 0.02(x_0 + y_0) = 1 + (0.02)(0 + 1) = 1.0200$

$x_2 = 0.04 \quad \rightarrow \; y_2 = y_1 + 0.02(x_1 + y_1) = 1.0200 +$
$(0.02)(0.02 + 1.0200) = 1.0408$

$x_3 = 0.06 \; \rightarrow \; y_3 = 1.0624$

$x_4 = 0.08 \; \rightarrow \; y_4 = 1.0848$

$x_5 = 0.10 \; \rightarrow \; y_5 = 1.1081$

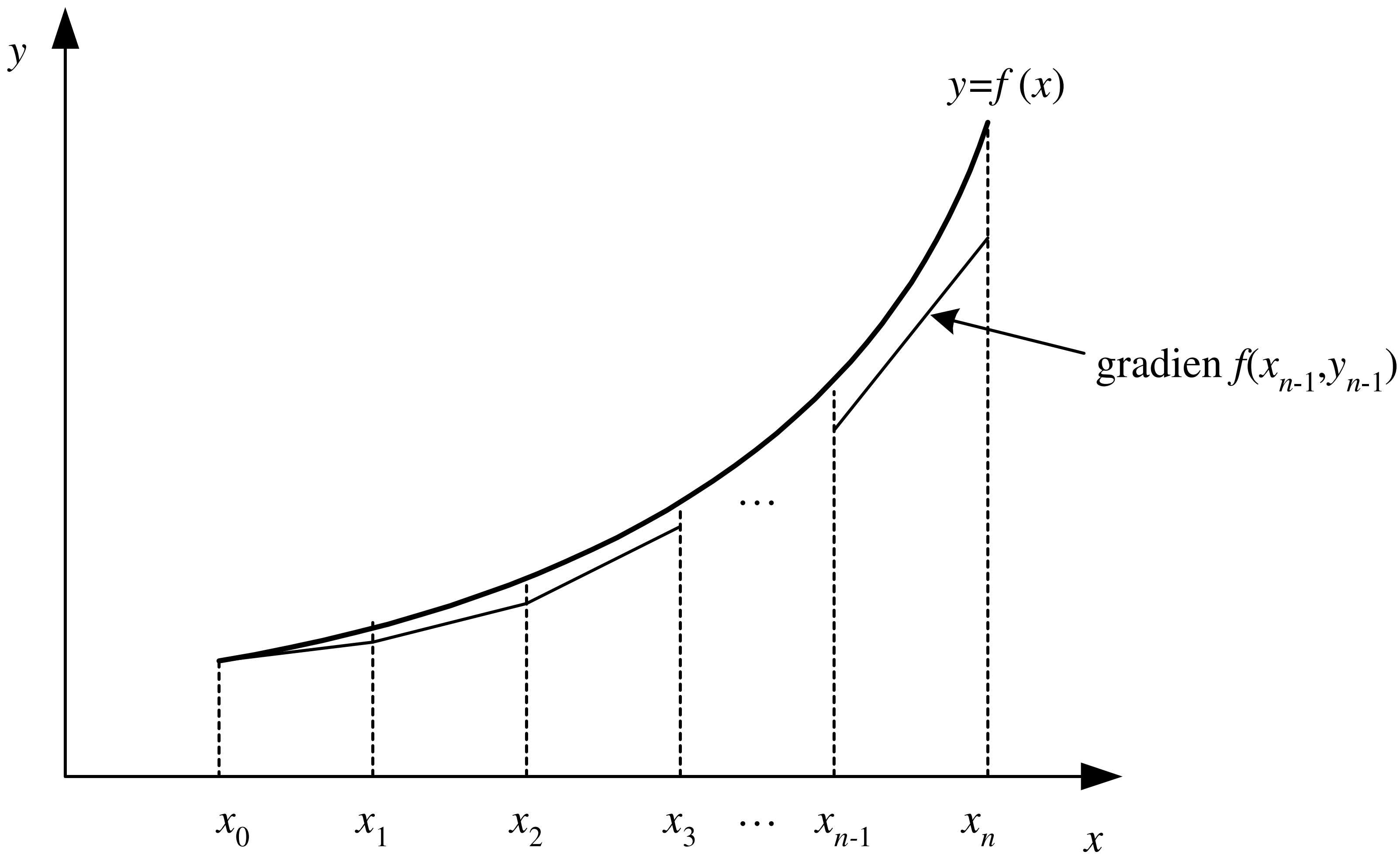
Jadi, $y\,(0,10) \approx 1.1081$

(Bandingkan dengan solusi sejatinya, $y\,(0.10) = 1.1103$, sehingga galatnya adalah

galat $= 1.1103 - 1.1081 = 0.0022$)

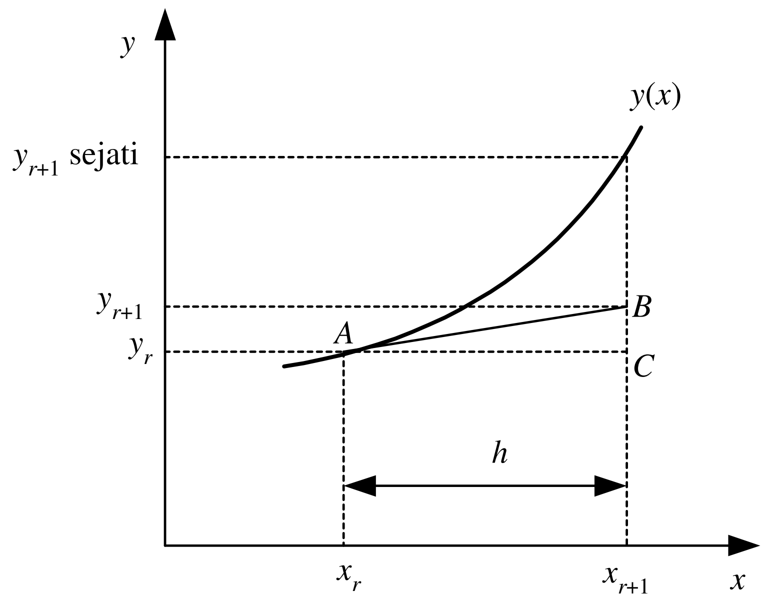
Tafsiran Geometri Metode PDB

- Pikirkanlah kembali bahwa $f(x,y)$ dalam persamaan diferensial menyatakan gradien garis singgung kurva di titik (x,y).
- Kita mulai menarik garis singgung dari titik (x_0, y_0) dengan gradien $f(x_0, y_0)$ dan berhenti di titik (x_1, y_1), dengan y_1 dihitung dari persamaan Euler.
- Selanjutnya, dari titik (x_1, y_1) ditarik lagi garis dengan gradien $f(x_1, y_1)$ dan berhenti di titik (x_2, y_2), dengan y_2 dihitung dari persamaan Euler.
- Proses ini kita ulang beberapa kali, misalnya sampai lelaran ke-n, sehingga hasilnya adalah garis patah-patah seperti yang ditunjukkan pada Gambar berikut:



y
y=f (x)
gradien $f(x_{n-1},y_{n-1})$
…
x_0
x_1
x_2
x_3
…
x_{n-1}
x_n
x

- Berdasarkan tafsiran geometri pada Gambar di atas, kita juga dapat menurunkan metode Euler. Tinjau Gambar di bawah ini. Gradien (*m*) garis singgung di x_r adalah



$$m = y'(x_r) = f(x_r, y_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_{r+1} - y_r}{h}$$

$$\Leftrightarrow \; y_{r+1} = y_r + hf(x_r, y_r)$$

yang tidak lain adalah persamaan metode Euler.

Metode Heun (Perbaikan Metoda Euler)

- Metode Euler mempunyai ketelitian yang rendah karena galatnya besar (sebanding dengan h).

- Buruknya galat ini dapat dikurangi dengan menggunakan metode Heun, yang merupakan perbaikan metode Euler (*modified Euler's method*).

- Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*). S

- Selanjutnya, solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan metode Heun (*corrector*).

- Persamaan Heun: $y_{r+1} = y_r + {}^h/_2 \, [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1})]$

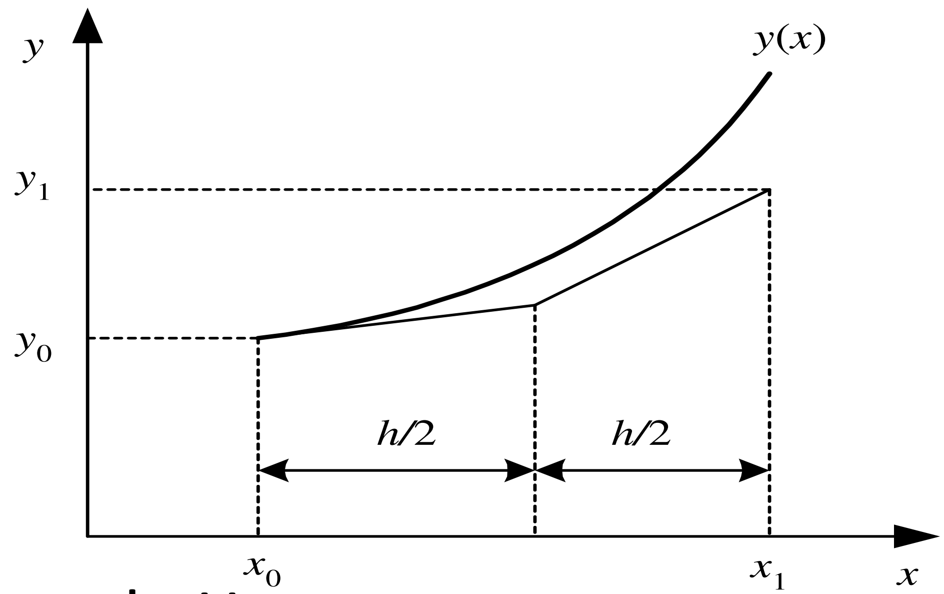
- Dalam persaman di atas, suku ruas kanan mengandung y_{r+1}. Nilai y_{r+1} ini adalah solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler.

- Karena itu, persamaan Heun dapat ditulis sebagai

Predictor : $y^{(0)}_{r+1} = y_r + hf(x_r, y_r)$
Corrector : $y_{r+1} = \mathrm{y}_\mathrm{r} + {}^h/_2 \, [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y^{(0)}_{r+1})]$

atau ditulis dalam satu kesatuan,
$y_{r+1} = y_r + {}^h/_2[f(x_r,y_r) + f(x_{r+1}, y_r + hf(x_r, y_r))]$

- Tafsiran Geometri Metode Heun:



- Galat Metode Heun:

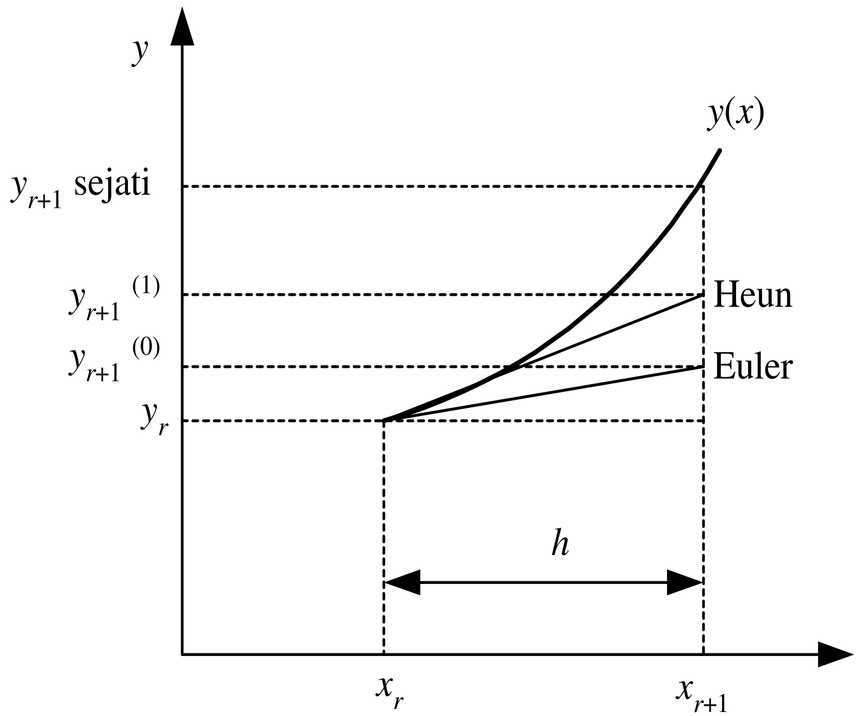
$$E_p \approx - \frac{h^3}{12} y''(t) \qquad , \; x_r < t < x_{r+1}$$

$$= O(h^3)$$

- Galat longgokan:

$$E_L = \sum_{r=1}^{n} -\frac{1}{12} h^3 y''(t)$$

$$= - \frac{(b-a)}{12} h^2 y''(t) = O(h^2)$$



```
function y_Heun(x0, y0, b, h:real):real;
{menghitung y(b) dengan metode Heun pada PDB
       y'=f(x,y);   y(x0)=y0
}
var
    r, n: integer;
    x, y, y_s : real;
begin
   n:=(b-x0)/h;        {jumlah langkah}
   y:=y0;              {nilai awal}
   x:=x0;
   for r:=1 to n do
    begin
       y_s:=y;                                       { y dari langkah r-1 }
       y:=y + h*f(x,y);                             { y(xr) dengan Euler }
       y:=y_s + h/2 * ((f(x,y_s) + f(x+h,y));   { y(xr) dengan
                                                      Heun }
      x:=x+1;                                         { titik berikutnya}
    end;
  y_Heun:=y;
 end;
```

Contoh: Diketahui PDB

$dy/dx = x + y$; $y(0) = 1$

Hitung y (0.10) dengan metode Heun (h = 0.02)

Penyelesaian:

Diketahui

$f(x, y) = x + y$

$a = x_0 = 0$; $b = 0.10$; $h = 0.02$

maka $n = (0.10 - 0)/0.02 = 5$ (jumlah langkah)

Langkah-langkah:

$x_1 = 0.02 \rightarrow y^{(0)}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

$= 1 + 0.02(0 + 1)$

$= 1.0200$

$y^{(1)}_1 = y_0 + (h/2) [f(x_0,y_0) + f(x_1,y^{(0)}_1)]$

$= 1 + (0.02/2) (0 + 1 + 0.02 + 1.0200)$

$= 1.0204$

$x_2 = 0.04 \;\rightarrow\; y^{(0)}_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

$= 1.0204 + 0.02\,(0.02 + 1.0204)$

$= 1.0412$

$y^{(1)}_2 = y_1 + (h/2)\,[f(x_1,y_1) + f(x_2, y^{(0)}_2)]$

$= 1.0204 + (0.02/2)\,[0.02 + 1.0204 + 0.04 + 1.0412]$

$= 1.0416$

…

$x_5 = 0.10 \;\rightarrow\; y^{(0)}_5 = y_4 + hf(x_4, y_4)$

$y^{(1)}_5 = y_4 + (h/2)\,[f(x_4,y_4) + f(x_5,y^{(0)}_5)]$

$= 1.1104$

Jadi, $y\,(0.10) \approx 1.1104$.

Bandingkan:

Nilai sejati : $y(0.10) = 1.1103$

Euler (Contoh 8.4) : $y(0.10) = 1.1081$

Heun (Contoh 8.5) : $y(0.10) = 1.1104 \rightarrow$ lebih baik dari Euler

Perluasan Metode Heun

- Metode Heun dapat diperluas dengan meneruskan lelarannya sebagai berikut:

$$y^{(0)}_{r+1} = y_r + hf(x_r , y_r)$$
$$y^{(1)}_{r+1} = y_r + {}^{h}/_{2} [f(x_r , y_r) + f(x_{r+1}, y^{(0)}_{r+1})]$$
$$y^{(2)}_{r+1} = y_r + {}^{h}/_{2} [f(\mathrm{x}_\mathrm{r} , y_r) + f(x_{r+1}, y^{(1)}_{r+1})]$$
$$y^{(3)}_{r+1} = y_r + {}^{h}/_{2} [f(\mathrm{x}_\mathrm{r} , y_r) + f(x_{r+1}, y^{(2)}_{r+1})]$$

....

$$y^{(k+1)}_{r+1} = y_r + {}^{\mathrm{h}}/_{2} [f(x_r , y_r) + f(x_{r+1}, y^{(k)}_{r+1})]$$

- Kondisi berhenti adalah bila $y^{(k)}_{r+1} - y^{(k-1)}_{r+1} < \varepsilon$

Metode Deret Taylor

- Metode deret Taylor adalah metode yang umum untuk menurunkan rumus-rumus solusi PDB.

- Metode Euler merupakan metode deret Taylor yang paling sederhana.

- Diberikan PDB

  $y'(x) = f(x,y)$ dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$

  Misalkan

  $y_{r+1} = y(x_{r+1}), \quad r = 0,1,\ldots,n$

  adalah hampiran nilai y di x_{r+1}.

- Hampiran ini diperoleh dengan menguraikan y_{r+1} di sekitar x_r sebagai berikut:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^3}{3!} y'''(x_r) + \ldots + \frac{(x_{r+1} - x_r)^n}{n!} y^{(n)}(x_r)$$

atau

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hy'(x_r) + \frac{h^2}{2} y''(x_r) + \frac{h^3}{6} y'''(x_r) + \ldots + \frac{h^{(n)} y^{(n)}}{n!} x_r$$

- Persamaan di atas menyiratkan bahwa untuk menghitung hampiran nilai y_{r+1}, kita perlu menghitung $y'(x_r)$, $y''(x_r)$,..., $y^{(n)}(x_r)$.

- **Contoh**: Diketahui PDB

  $dy/dx = ½\,x - ½\,y$; $y(0) = 1$

  Tentukan $y(0.50)$ dengan metode deret Taylor ($h = 0.25$).

Penyelesaian:

$x_0 = 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = 1$

$x_1 = 0.25 \quad \rightarrow \quad y_1 = ?$

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}\, y''(x_0) + \frac{h^3}{6}\, y'''(x_0) + \ldots + \frac{h^{(n)}}{n!}\, y^{(n)}\, x_0 + \ldots$$

Misal kita hanya menghitung $y(x_1)$ sampai suku orde ke-4 saja.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= ½\,x - ½\,y \\
y''(x) &= \frac{d}{dx}\,(\,½\,x - ½\,y\,) \\
&= ½ + f \,.\, (-1/2) \\
&= ½ - (\,½\,x - ½\,y)\,.\,½ \\
&= ½ - ¼\,x + ¼\,y
\end{aligned}$$

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y\right)$$

$$= -1/4 + f \;.\; 1/4$$

$$= -1/4 + \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y\right) . \tfrac{1}{4}$$

$$= -1/4 + x/8 - y/8$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}\left(1/4 + 1/8\,x - 1/8\,y\right)$$

$$= 1/8 + f \;.\; (-1/8)$$

$$= 1/8 - (x/2 - y/2) \;.\; 1/8$$

$$= 1/8 - x/16 + y/16$$

Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
y(x_0) &= y(0) = 1 \\
y'(x_0) &= y'(0) = ½ \times 0 - ½ \times 1 = -1/2 \\
y''(x_0) &= y''(0) = ½ - ¼ \times 0 + ¼ \times 1 = 3/4 \\
y'''(x_0) &= y'''(0) = -1/4 + 1/8 \times 0 - 1/8 \times 1 = - 3/8 \\
y^{(4)}(x_0) &= y^{(4)}(0) = 1/8 - 1/16 \times 0 + 1/16 \times 1 = 3/16
\end{aligned}
$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
y(x_1) &= 1 + 0.25\ (-1/2) + ((0.25)^2/2)\ (3/4) + ((0.25)^3/6)\ (-3/8) + ((0.25)^4/24)\ (3/16) \\
&= 0.8974915
\end{aligned}
$$

$x_2 = 0.50 \rightarrow y_2 = ?$

$$y(x_2) = y(x_1) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2} y''(x_1) + \frac{h^3}{6} y'''(x_1) + \ldots + \frac{h^{(n)}}{n!} y^{(n)} x_1 = \ldots$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
y(x_1) &= 0.8974915 \\
y'(x_1) &= (1/2)(0.25) - (1/2)(0.8974915) = -0.3237458 \\
y''(x_1) &= ½ - (¼)(0.25) + (1/4)(0.8974915) = 0.6618729 \\
y'''(x_1) &= -1/4 + (1/8)(0.25) - (1/8)(0.8974915) = -0.3309634 \\
y^{(4)}(x_1) &= 1/8 - (1/16)(0.25) + (1/16)(.8974915) = 0.1654682
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
y_2 &= 0.8974915 + 0.25\,(-0.3237458) + (0.25^2/2)(0.6618729) \\
&\quad + (0.25^3/6)(-0.3309634) + (0.25^4/24)(0.1654682) \\
&= 0.8364037
\end{aligned}$$

Jadi, $y(0.50) \approx 0.8364037$

(Bandingkan dengan solusi sejati, $y(0.50) = 0.8364023$)

Galat metode deret Taylor

Galat perlangkah metode deret Taylor setelah pemotongan ke-n adalah

$$E_t \approx \frac{h^{(n+1)} f^{(n+1)}}{(n+1)!}(t), \quad x_0 < t < x_{r+1}$$

$$= O(h^{n+1})$$

Galat longgokan total metode deret Taylor adalah:

$$E_L = \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

$$= \frac{b-a}{h} \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) = (b - a) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} h^n = O(h^n)$$

Metode Runge-Kutta

- Penyelesaian PDB dengan metode deret Taylor tidak praktis karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan.

- Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan.

- Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi.

- Metode Runge-Kutta adalah metode PDB yang paling popuper karena banyak dipakai dalam praktek.

- Bentuk umum metoda Range-Kutta orde-n ialah:

$$y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_n k_n$$

dengan $a_1, a_2, ..., a_\mathrm{n}$ adalah tetapan, dan

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$k_2 = hf(x_r + p_1h, y_r + q_{11}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_r + p_2h, y_r + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$
$$...$$
$$k_n = hf(x_r + p_{n-1}h, y_r + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + ... + q_{n-1, n-1} k_{n-1})$$

- Nilai a_i, p_i, q_{ij} dipilih sedemikian rupa sehingga meminimumkan galat per langkah, dan persamaan di atas akan sama dengan metode deret Taylor dari orde setinggi mungkin..

- Galat per langkah metode Runge-Kutta orde-n: $O(h^{n+1})$

- Galat longgokan metode Runge-Kutta orde-n: $O(h^n)$
- Orde metode = n

Metode Runge-Kutta Orde Satu

- **Metode Runge-Kutta orde satu** berbentuk

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$y_{r+1} = y_r + (a_1 k_1)$$

Galat per langkah metode R-K orde satu adalah $O(h^2)$.
Galat longgokan metode R-K orde satu adalah $O(h)$.

- Yang termasuk ke dalam metode Runge-Kutta orde satu ialah metode Euler:

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$y_{r+1} = y_r + k_1 \qquad \text{(dalam hal ini } a_1 = 1\text{)}$$

Metode Runge-Kutta Orde Dua

- **Metode Runge-Kutta orde dua** berbentuk

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_r, y_r) \\
k_2 &= hf(x_r + p_1 h,\ y_r + q_{11} k_1) \\
y_{r+1} &= y_r + (a_1 k_1 + a_2 k_2)
\end{aligned}
$$

- Galat per langkah metode Runge-Kutta orde dua adalah $O(h^3)$.

- Galat longgokan metode Runge-Kutta orde dua adalah $O(h^2)$.

- Contoh metode Runge-Kutta orde dua adalah metode Heun, yang dalam hal ini

$$a_2 = 1/2,$$

$$a_1 = 1/2,$$

$$p_1 = q_{11} = 1$$

- Dalam bentuk Runge-Kutta orde 2, metode Heun dapat ditulis sebagai

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$

$$k_2 = hf(x_r + h, y_r + k_1)$$

$$y_{r+1} = y_r + {}^1/_2\,(k_1 + k_2)$$

- Contoh metode Runge-Kutta orde dua lainnya ialah **metode Ralston**, yang dalam hal ini

$$a_2 = 2/3$$
$$a_1 = 1/3,$$
$$p_1 = q_{11} = 3/4$$

- sehingga metode Ralston dapat ditulis dalam bentuk Runge-Kutta orde dua sebagai

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$k_2 = hf(x_r + {}^3/_4\, h, y_r + {}^3/_4\, k_1)$$
$$y_{r+1} = y_r + ({}^1/_3\, k_1 + {}^2/_3\, k_2)$$

Metode Runge-Kutta Orde Tiga

- Metode Runge-Kutta yang terkenal adalah metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Runge-Kutta orde empat.

- Metode Runge-Kutta orde tiga berbentuk:

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$k_2 = hf(x_r + {}^1/_2\, h,\ y_r + {}^1/_2\, k_1)$$
$$k_3 = hf(x_r + h,\ y_r - k_1 + 2k_2)$$
$$y_{r+1} = y_r + {}^1/_6\,(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

- Galat per langkah metode R-K orde tiga adalah $O(h^4)$.
- Galat longgokan metode R-K orde tiga adalah $O(h^3)$.

```
function y_RK3(x0, y0, b, h:real):real;
{menghitung y(b) dengan metode Runge-Kutta orde tiga pada PDB
   y'=f(x,y);    y(x0)=y0
}
 var
    r, n: integer;
    x, y, k1, k2, k3: real;
 begin
    n:=(b - x0)/h;  {jumlah langkah}
    y:=y0;          {nilai awal}
    x:=x0;
    for r:=1 to n do
      begin
       k1:=h*f(x, y);
       k2:=h*f(x + h/2, y + k1/2);
       k3:=h*f(x + h, y - k1 + 2*k2);
       y:=y + (k1 + 4*k2 + k3)/6             { nilai y(xr) }
       x:=x+h;                               { titik berikutnya}
     end;
   y_RK3:=y;
 end;
```

Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta orde empat adalah

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$k_2 = hf(x_r + {}^1/_2\, h, y_r + {}^1/_2\, k_1)$$
$$k_3 = hf(x_r + {}^1/_2\, h, y_r + {}^1/_2\, k_2)$$
$$k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3)$$
$$y_{r+1} = y_r + {}^1/_6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Galat per langkah metode Runge-Kutta orde empat adalah $O(h^5)$.

- Galat longgokan metode Runge-Kutta orde empat adalah $O(h^4)$.

```
function y_RK4(x0, y0, b, h:real):real;
 {menghitung y(b) dengan metode Runge-Kutta orde empat pada PDB
   y'=f(x,y);   y(x0)=y0   }
 var
    r, n: integer;
    x, y, k1, k2, k3, k4: real;
 begin
    n:=(b - x0)/h;          {jumlah langkah}
    y:=y0;                  {nilai awal}
    x:=x0;
    for r:=1 to n do
     begin
       k1:=h*f(x, y);
       k2:=h*f(x + h/2, y + k1/2);
       k3:=h*f(x + h/2, y + k2/2);
       k4:=h*f(x + h, y + k3);
       y:=y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6 { nilai y(xr) }
       x:=x+h;                             { titik berikutnya}
     end;
    y_RK4:=y;
 end;
```

- Contoh:

Diketahui PDB

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad ; \; y(0) = 0$$

Tentukan $y(0.20)$ dengan metode Runge-Kutta orde tiga. Gunakan ukuran langkah $h = 0.10$.

Penyelesaian:

Diketahui

$$\begin{aligned} a &= x_0 = 0 \\ b &= 0.20 \\ h &= 0.10 \end{aligned}$$

maka $n = (0.20 - 0)/0.10 = 2$ (jumlah langkah

Langkah:

$$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 0$$
$$x_1 = 0.10 \rightarrow y_1 = ?$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0.10)\,(1 + 0^2) = 0.10$$
$$k_2 = hf(x_0 + {}^1/_2\, h,\ y_0 + {}^1/_2\, k_1) = (0.10)\,(1 + 0.05^2) = 0.10025$$
$$k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 - k_1 + 2k_2) = (0.10)\,(1 + 0.1005^2) = 0.10101$$
$$y_1 = y_0 + {}^1/_6\,(k_1 + 4k_2 + k_3)$$
$$= 0 + {}^1/_6\,(0.10 + 4 \times 0.10025 + 0.10101) = 0.10034$$

$x_2 = 0.20 \rightarrow y_2 = ?$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_1, y_1) = (0.10)(1 + 0.10034^2) = 0.10101 \\
k_2 &= hf(x_1 + {}^1/_2\, h,\, y_1 + {}^1/_2\, k_1) = (0.10)(1 + 0.150845^2) = 0.10228 \\
k_3 &= hf(x_1 + h,\, y_1 - k_1 + 2k_2) = (0.10)\,(1 + 0.20389^2) = 0.10416 \\
y_2 &= y_1 + {}^1/_6\,(k_1 + 4k_2 + k_3) \\
&= 0.10034 + {}^1/_6\,(0.10101 + 4 \times 0.10228 + 0.10416) \\
&= 0.20272
\end{aligned}
$$

Jadi, $y(0.20) \approx 0.20272$.
Nilai sejati $\rightarrow y(0.20) = 0.20271$.